

บทที่ 3 การลดทอนฟังก์ชัน

Electrical and Computer Department
Faculty of Engineering
Thammasat University

วิธีการลดทอนฟังก์ชัน

- การลดทอนนิพจน์ของบูลีนจะเป็นการลดความซับซ้อนของนิพจน์ลง มีผลทำให้การสร้างเป็นวงจรง่ายขึ้น วิธีการลดทอนมีอยู่หลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียง 3 วิธีคือ

- ใช้ทฤษฎีและกฎต่างๆของพีชคณิตบูลีนโดยตรง
- ผังคาร์โนห์ (Karnaugh Maps)
- QUINE-McCLUSKEY METHOD หรือ QM

ใช้ทฤษฎีและกฎต่างๆของพีชคณิตบูลีน โดยตรง

- วิธีนี้จะใช้ได้กับนิพจน์ทุกชนิด ตัวแปรที่ตัวก็ได้ แต่มีจุดอ่อนที่ค่อนข้างต้องใช้ความละเอียดรอบคอบของผู้ทำมาก เป็นวิธีการที่น่าเอาทฤษฎีและกฎข้อต่างๆของบูลีนมาจัดรูปสมการเสียใหม่ให้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้ เช่น จงลดทอนฟังก์ชัน $F(A,B,C) = A + AB + BC$

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A + A.B + B.C \\ &= A.(1+B) + B.C \\ &= A + B.C \end{aligned}$$

ลดทอนฟังก์ชัน $F(A,B,C) = A.B + A.\bar{C} + B.C$

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A.B + A.\bar{C} + B.C \\ &= A.B.(C + \bar{C}) + A.\bar{C} + B.C \\ &= A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{C} + B.C \\ &= B.C(A + 1) + A.\bar{C}(B + 1) \\ &= B.C + A.\bar{C} \end{aligned}$$

ลดทอนฟังก์ชัน $F(A,B,C) = \overline{(A.\bar{B}.C)} + \overline{(A + B + \bar{C})} + B.C$

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \overline{(A.\bar{B}.C)} + \overline{(A + B + \bar{C})} + B.C \\ &= \overline{A + B + \bar{C}} + \overline{A + B + \bar{C}} + B.C \\ &= \overline{A + B + \bar{C}} + B.C \\ &= A.\bar{B}.C.(B + \bar{C}) \\ &= A.\bar{B}.C \end{aligned}$$

ใช้ตาราง Karnaugh (Karnaugh Maps)

ประกอบด้วย

1. ตาราง
2. การใส่แต่ละเทอมของฟังก์ชันลงในตาราง

ตาราง Karnaugh แบบ 1 ตัวแปร

กรณีใช้ minterm หรือ SOP

A	m_i
0	$\bar{A} = m_0$
1	$A = m_1$

(ก)

A	\bar{A}
0	\bar{A}
1	A

(ข)

A	m_0
0	m_0
1	m_1

(ค)

A	0
0	0
1	1

(ง)

กรณีใช้ Maxterm หรือ POS

A	m_i
0	$A = M_0$
1	$A = M_1$

(ก)

A	\bar{A}
0	\bar{A}
1	A

(ข)

A	M_0
0	M_0
1	M_1

(ค)

A	0
0	0
1	1

(ง)

ตาราง Karnaugh แบบ 2 ตัวแปร กรณีใช้ minterm

AB	m_i
00	$\overline{A}\overline{B} = m_0$
01	$\overline{A}B = m_1$
10	$A\overline{B} = m_2$
11	$AB = m_3$

(ก)

		B	
		0	1
A	0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
	1	$A\overline{B}$	AB

(ข)

		0	1
A	0	m_0	m_1
	1	m_2	m_3

(ค)

		0	1
A	0	0	1
	1	2	3

(ง)

		A	
		0	1
B	0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
	1	$A\overline{B}$	AB

(จ)

		0	1
B	0	m_0	m_2
	1	m_1	m_3

(ฉ)

		0	1
B	0	0	2
	1	1	3

(ช)

รศ.ฉวรงค์ นามนธสง

การออกแบบเชิงตรรกศาสตร์

7

ตาราง Karnaugh แบบ 2 ตัวแปร กรณีใช้ Maxterm

AB	m_i
00	$AB = M_0$
01	$\overline{A}\overline{B} = M_1$
10	$\overline{A}B = M_2$
11	$A\overline{B} = M_3$

(ก)

		B	
		0	1
A	0	AB	$\overline{A}\overline{B}$
	1	$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}$

(ข)

		0	1
A	0	M_0	M_1
	1	M_2	M_3

(ค)

		0	1
A	0	0	1
	1	2	3

(ง)

		A	
		0	1
B	0	AB	$\overline{A}\overline{B}$
	1	$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}$

(จ)

		0	1
B	0	M_0	M_2
	1	M_1	M_3

(ฉ)

		0	1
B	0	0	2
	1	1	3

(ช)

รศ.ฉวรงค์ นามนธสง

การออกแบบเชิงตรรกศาสตร์

8

ตาราง Karnaugh แบบ 3 ตัวแปร กรณีใช้ minterm

การเขียนแบบที่ 1

BC		00	01	11	10	→	BC		00	01	11	10	→	BC		00	01	11	10				
		A	0	1	1				0	A	0	1				1	0	A	0	1	1	0	
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$	→	0	m_0	m_1	m_3	m_2	→	0	0	1	3	2	→	0	0	1	3	2
1	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$A\bar{B}\bar{C}$		1	m_4	m_5	m_7	m_6		1	4	5	7	6						

การเขียนแบบที่ 2

AB		00	01	11	10	→	AB		00	01	11	10	→	AB		00	01	11	10				
		C	0	1	1				0	C	0	1				1	0	C	0	1	1	0	
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$	→	0	m_0	m_2	m_6	m_4	→	0	0	2	6	4	→	0	0	2	6	4
1	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$A\bar{B}\bar{C}$		1	m_1	m_3	m_7	m_5		1	1	3	7	5						

ตาราง Karnaugh แบบ 4 ตัวแปร กรณีใช้ minterm

การเขียนแบบที่ 1

CD		00	01	11	10	→	CD		00	01	11	10				
		AB	00	01	11				10	AB	00	01	11	10		
00	m_0	m_1	m_3	m_2	→	00	0	1	3	2	→	00	0	1	3	2
01	m_4	m_5	m_7	m_6		01	4	5	7	6		01	4	5	7	6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	→	11	12	13	15	14	→	11	12	13	15	14
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}		10	8	9	11	10		10	8	9	11	10

การเขียนแบบที่ 2

AB		00	01	11	10	→	CD		00	01	11	10				
		CD	00	01	11				10	AB	00	01	11	10		
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8	→	00	0	4	12	8	→	00	0	4	12	8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_{11}		01	1	5	13	9		01	1	5	13	9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_9	→	11	3	7	15	11	→	11	3	7	15	11
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}		10	2	6	14	10		10	2	6	14	10

ลักษณะการรวมเทอมบนฟังก์ชัน

$$F(A,B,C) = A\bar{B} + A.B$$

A	B	F1	
0	0	0	m0
0	0	0	m1
1	0	1	m2
1	1	1	m3

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

$$F(A,B) = A$$

$$F(A,B,C) = \bar{A}.B + A.B$$

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

$$F(A,B) = B$$

ลักษณะการรวมเทอมบนฟังก์ชันแบบ 3 ตัวแปร

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	2
1	4	1	1	6

$$F(A,B,C) = C$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	4	1	5

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	3
1	1	4	1	5

$$F(A,B,C) = B$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	4	1	1

$$F(A,B,C) = B + C$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	3
1	1	4	5	7

$$F(A,B,C) = \bar{C}$$

ลักษณะการรวมเทอมบนฟังก์ชันโน้ตแบบ 4 ตัวแปร

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	1	5	7
11	12	1	13	15
10	8	9	11	10

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	4	5	7
11	1	12	13	15
10	1	8	9	11

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	3
01	4	1	5	7
11	12	1	13	15
10	8	1	9	11

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	4	5	7
11	1	12	13	15
10	1	8	9	11

ลักษณะการรวมเทอม Maxterm บนฟังก์ชันโน้ต

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	3
01	0	0	5	7
11	12	13	15	14
10	8	9	0	0

ตัวอย่าง



$$F(A,B,C,D) = \sum (0,1,4,5,7,10,15)$$

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.D + A.B.C.D$$

รศ.ฉวรงค์ บานมทอง

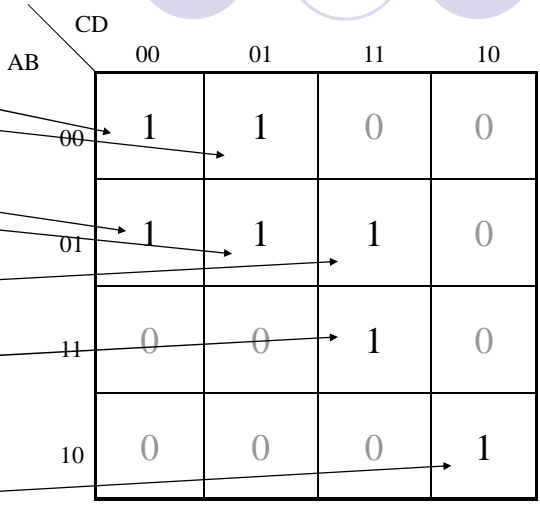
การลดทอนฟังก์ชัน

15

ตัวอย่าง



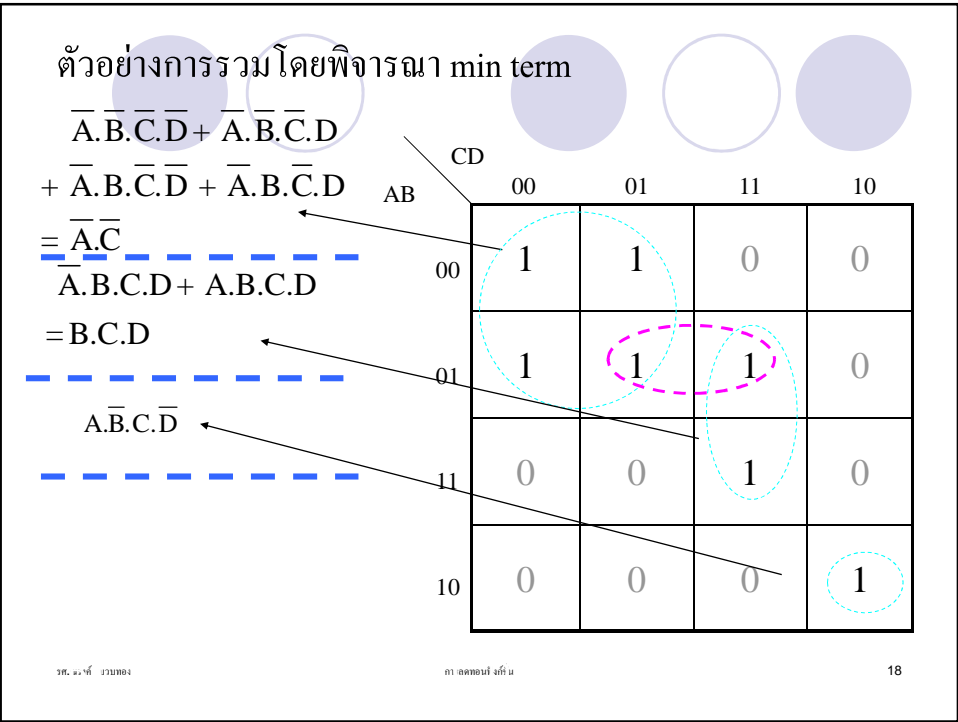
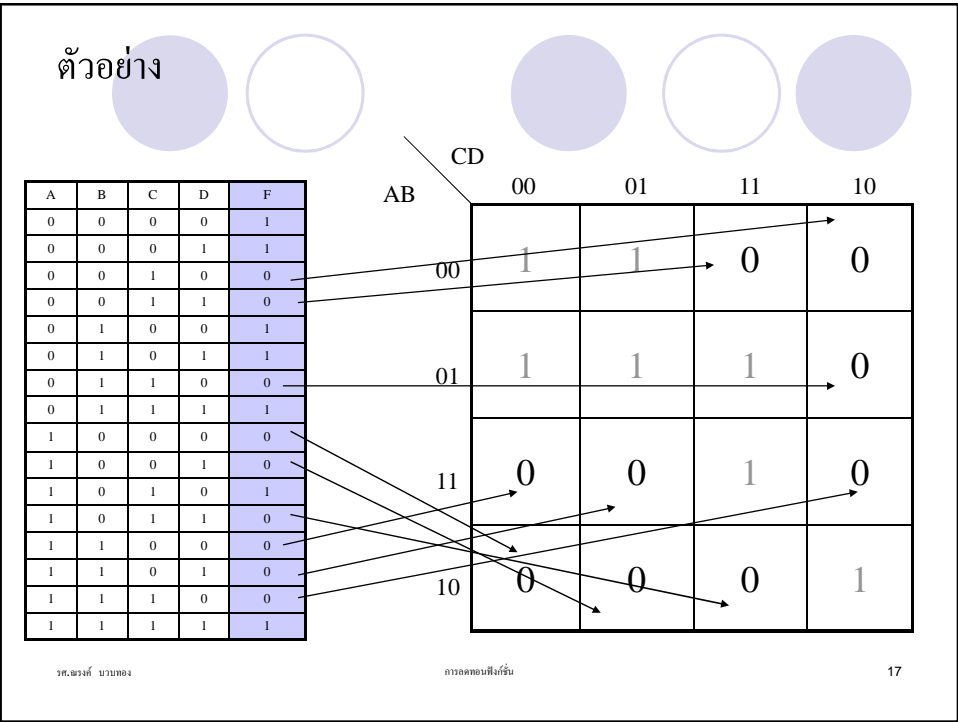
A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



รศ.ฉวรงค์ บานมทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

16



ตัวอย่างการรวมโดยพิจารณา max term

$(A+B+\bar{C}+D) \cdot (A+B+\bar{C}+\bar{D})$
 $= (A+B+\bar{C})$
 $(A+B+\bar{C}+D) \cdot (A+B+\bar{C}+D)$
 $= (\bar{B}+\bar{C}+D)$
 $(\bar{A}+\bar{B}+C+D) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})$
 $= (\bar{A}+C)$
 $(\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D})$

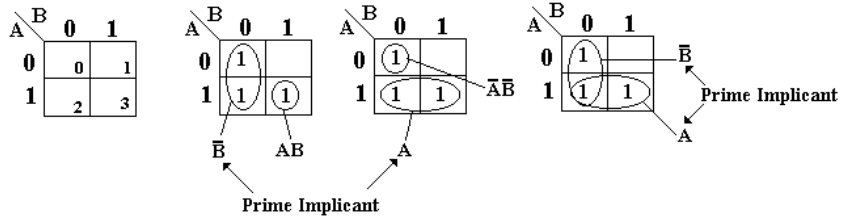
$F(A,B,C,D) = (A+B+\bar{C}) \cdot (\bar{B}+\bar{C}+D) \cdot (\bar{A}+C) \cdot (\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D})$

Prime Implicant (PI)

- Prime Implicant (PI) หมายถึงเทอมผลคูณ (Product Term) ของตัวแปรใดๆเทอมหนึ่ง ที่เกิดขึ้นจากการลดรูปฟังก์ชันโดยที่เทอมผลคูณนั้นไม่สามารถรวมกับเทอมผลคูณอื่นๆ เพื่อให้ได้เทอมผลคูณใหม่ที่มีตัวแปรน้อยกว่าเดิม
- การที่ Minterm ตัวใดตัวหนึ่งต้องรวมกับ Minterm อีกตัวหนึ่ง โดยไม่มีโอกาสเลือกรวมกับ Minterm ตัวอื่น เราจะเรียงคู่ของ Minterm นั้นๆ ว่าเป็น Essential Prime Implicant

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B) = \sum m(0, 2, 3)$

หรือ $F(A, B) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$



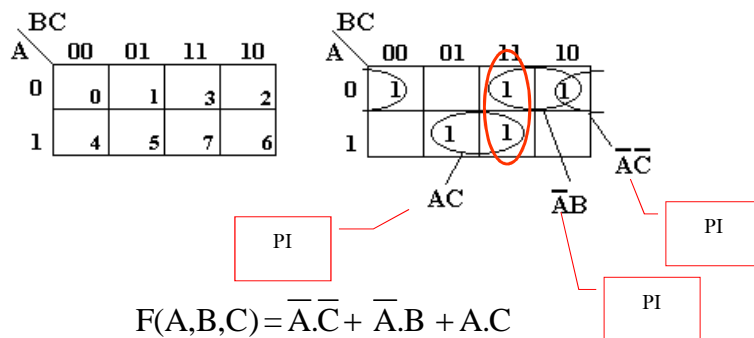
$$F(A, B) = \bar{B} + A \cdot B$$

OR $F(A, B) = \bar{A} \cdot \bar{B} + A$

OR $F(A, B) = \bar{B} + A$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B, C) = \sum m(0, 2, 3, 5, 7)$

หรือ $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}C$



$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{C} + \bar{A} \cdot B + A \cdot C$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 7, 11, 15)$

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

	CD	00	01	11	10
AB	00				
	01	1	1	1	
	11			1	
	10				1

$\bar{A}BCD$

$\bar{A}BC\bar{C}$ $\bar{A}CD$

Prime Implicant

	CD	00	01	11	10
AB	00				
	01	1	1	1	
	11			1	
	10				1

BCD

$\bar{A}BC$ $\bar{A}BD$ $\bar{A}CD$

Essential Prime Implicant

ทั้งหมดเป็น Prime Implicant

การลดทอนสมการลอจิก สำหรับตัวแปร 5 ตัว โดยใช้ผังคาร์โนห์

$$F(A,B,C,D,E) = \bar{A}.B.\bar{C}.D.\bar{E} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D.E + \bar{A}.B.C.D.E + A.B.\bar{C}.D.\bar{E} + A.B.C.D.\bar{E} + A.B.C.D.E$$

A = 0

	DE	00	01	11	10
BC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$$F(A,B,C,D,E) = B.\bar{C}.D.\bar{E} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D.E + B.C.D.E + A.B.D.\bar{E}$$

A = 1

	DE	00	01	11	10
BC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

การลดทอนสมการลอจิก สำหรับตัวแปร 6 ตัว โดยใช้ฟังก์ชัน

		AB = 00				AB = 01					
AB \ CD		00	01	11	10	CD \ EF		00	01	11	10
00		0	1	3	2	00		16	17	19	18
01		4	5	7	6	01		20	21	23	22
11		12	13	15	14	11		28	29	31	30
10		8	9	11	10	10		24	25	27	26

		AB = 10				AB = 11					
CD \ EF		00	01	11	10	CD \ EF		00	01	11	10
00		32	33	35	34	00		48	49	51	50
01		36	37	39	38	01		52	53	55	54
11		44	45	47	46	11		60	61	63	62
10		40	41	43	42	10		56	57	59	58

รศ.ฉวีรัตน์ นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

25

Don't care terms

หมายถึง เทอมที่จะไม่ปรากฏในวงจร หรือไม่มีโอกาสเกิดขึ้นในการออกแบบเช่น ฟังก์ชันหนึ่งมี 3 ตัวแปร จะให้ค่าเป็นจริง (true) เมื่อมีอินพุต 2 อินพุตเป็นลอจิก '1' จะให้ค่าเป็นเท็จเมื่อมีอินพุต 1 อินพุตเป็นลอจิก '1' ซึ่งเมื่อนำมาเขียนเป็นตารางการทำงานจะเห็นได้ว่าเมื่อ ABC เป็น 000 และ 111 จะไม่ตรงกับเงื่อนไขใดเลย สถานะนี้เรียกว่า don't care term ใช้สัญลักษณ์เป็นตัว d ในการออกแบบค่านี้เราสามารถกำหนดให้เป็นลอจิก 0 หรือ 1 ก็ได้

A	B	C	F
0	0	0	d
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	d

รศ.ฉวีรัตน์ นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

26

	BC			
A	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

	BC			
A	00	01	11	10
0	d		1	
1		1	d	1

AC AB

$$F(A,B,C) = AB+AC+BC$$

หรือเขียนแบบ POS

	BC			
A	00	01	11	10
0	d	0		0
1	0		d	

(B+C) (A+B) (A+C)

$$F = (A+B)(A+C)(B+C)$$

รศ.ฉัตรณี น.....

27

งานในห้องเรียน

จากฟังก์ชันต่อไปนี้จงลดรูปฟังก์ชัน

$$F(A,B,C,E,F) = \sum m(0,1,2,3,8,9,11,10)$$

$$F(A,B,C,E,F) = \sum m(0,1,2,8,9,10) + d(3,5,7,11,13,15)$$

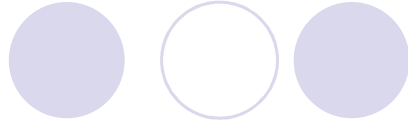
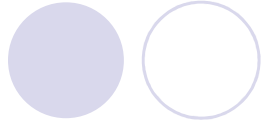
$$F(A,B,C,E,F) = \prod M(0,4,8,12) \cdot \prod d(5,13)$$



รศ.ฉัตรณี นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

28



จบบทแล้ว

