

2. พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

- วัตถุประสงค์
- บทนำ
- หลักการเบื้องต้นของพีชคณิตบูลีน
- ทฤษฎีของบูลีน (Boolean Theorems)
- รูปแบบมาตรฐานของนิพจน์บูลีน

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้เข้าใจในหลักการของพีชคณิตบูลีน
2. สามารถใช้หลักการของพีชคณิตบูลีนกับวงจรโลจิกได้

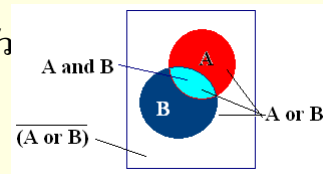
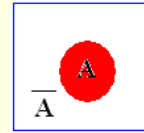
บทนำ

พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) เป็นคณิตศาสตร์ที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาทางตรรกะ ถูกคิดค้นพัฒนาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ จอร์จบูล (George Boole) ต่อมาผู้พัฒนาให้สมบูรณ์ขึ้นอีกหลายคน

ตัวแปรในพีชคณิตบูลีน มีเพียง 2 ค่า คือ 0 กับ 1 ตัวกระทำพื้นฐานของพีชคณิตบูลีนประกอบด้วย

NOT (หรือ Inverter) AND(.) และ OR(+)

ปัจจุบันพีชคณิตบูลีนใช้ในการออกแบบวงจรลอจิก ทำให้ลดความยุ่งยากของวงจรลอจิกลงได้มาก



Boolean

รศ.ฉวรงค์ บานทอง

3

หลักการเบื้องต้นของพีชคณิตบูลีน

1. ความจริง (Axioms) ของบูลีน

- A1) $A = 0$
- A2) ถ้า $A = 0$ แล้ว $\bar{A} = 1$
- A3) $0.0 = 0$
- A4) $1.1 = 1$
- A5) $0.1 = 1.0 = 0$

หลักการ AND

หลักการ OR

- $A = 1$
- ถ้า $A = 1$ แล้ว $\bar{A} = 0$
- $1+1 = 1$
- $1+0 = 0+1 = 1$
- $0+0 = 0$

Boolean

รศ.ฉวรงค์ บานทอง

4

2. ทฤษฎีคู่ (Duality theorem)

- เปลี่ยน OR เป็น AND
- เปลี่ยน AND เป็น OR
- เปลี่ยน 1 เป็น 0
- เปลี่ยน 0 เป็น 1

ตัวอย่าง

$$0.0 = 0$$

เมื่อใช้ทฤษฎีคู่

$$1 + 1 = 1$$

ข้อควรระวัง

- ทฤษฎีคู่ นี้ไม่ได้หมายความว่าเมื่อแปลงแล้วสมการใหม่จะเท่ากับสมการเดิม
- แต่เมื่อแปลงแล้วข้างซ้ายและขวาของเครื่องหมายที่เท่ากับจะยังคงเท่ากัน

ทฤษฎีของบูลีน (Boolean Theorems)

T1) $A + 0 = A$

T2) $A + 1 = 1$

T3) $A + A = A$

T4) $\overline{\overline{A}} = A$

T5) $A + \overline{A} = 1$

T6) Commutative law:

$$A + B = B + A$$

T7) Associative law

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

T8) Distributive law:

$$(A.B) + (A.C) = A.(B + C)$$

T1) $A.1 = A$

T2) $A.0 = 0$

T3) $A.A = A$

T4) $\overline{\overline{A}} = A$

T5) $A.\overline{A} = 0$

T6) Commutative law:

$$A.B = B.A$$

T7) Associative law

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

T8) Distributive law:

$$(A + B).(A + C) = A + (B.C)$$

ทฤษฎีของบูลีน (ต่อ)

T9) *Absorption theorem:*

$$A + (A.B) = A$$

$$\blacksquare A.(A + B) = A$$

T10) *Logic adjacency theorem:*

$$(A.B) + (A.\bar{B}) = A$$

$$\blacksquare (A + B).(A + \bar{B}) = A$$

T11) *Consensus*

$$(A.B) + (\bar{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\bar{A}.C)$$

$$\blacksquare (A + B).(\bar{A} + C).(B + C) = (A + B).(\bar{A} + C)$$

T12) *DeMorgan's theorem:*

$$\overline{(A + B)} = (\bar{A}.\bar{B})$$

$$\blacksquare \overline{(A.B)} = (\bar{A} + \bar{B})$$

T13) *Simplification theorem:*

$$A + (\bar{A}.B) = A + B$$

$$\blacksquare A.(\bar{A} + B) = A.B$$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงพิสูจน์ทฤษฎีของบูลีนต่อไปนี้

ก) $A.\bar{A} = 0$

ข) $(A.B) + (A.\bar{B}) = A$

ค) $A.(\bar{A} + B) = A.B$

ง) $A + (A.B) = A$

วิธีทำ

ก) พิสูจน์ $A.\bar{A} = 0$ โดยใช้ความจริงของบูลีน

ถ้า $A = 1$ และแล้ว $\bar{A} = 0$

ดังนั้น $1 . 0 = 0$

ถ้า $A = 0$ และแล้ว $\bar{A} = 1$

ดังนั้น $0 . 1 = 0$

สรุป $A.\bar{A} = 0$

ข) พิสูจน์ $(A.B) + (A.\bar{B}) = A$ โดยใช้ทฤษฎีของบูลีน

$$\begin{aligned}(A.B) + (A.\bar{B}) &= A.(B + \bar{B}) \dots\dots\dots (T8) \\ &= A.1 \dots\dots\dots (T5) \\ &= A \dots\dots\dots (T1)\end{aligned}$$

ค) พิสูจน์ $A(\bar{A} + B) = A.B$ โดยใช้ทฤษฎีของบูลีน

$$\begin{aligned}A(\bar{A} + B) &= A.\bar{A} + A.B \dots\dots\dots (T8) \\ &= 0 + A.B \dots\dots\dots (T5) \\ &= A.B \dots\dots\dots (T1)\end{aligned}$$

ง) พิสูจน์ $A + (A.B) = A$ โดยใช้ตารางความจริง (Truth table) หรือ
ตารางการทำงาน



A	B	A.B	A+(A.B)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

สรุป $A + (A.B) = A$

แบบฝึกหัด

1. จงพิสูจน์ว่าสมการต่อไปนี้ถูกต้อง

$$1.1 \quad (A.B) + (\bar{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\bar{A}.C)$$

$$1.2 \quad \overline{(A+B)} = \bar{A}.\bar{B}$$

2. จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น

$$2.1 \quad F = (\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}) + (\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D) + (\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}) + (\bar{A}.\bar{B}.C.D)$$

$$2.2 \quad F = (\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}) + (B.\bar{C}.\bar{D}) + (A.C.\bar{D})$$

$$2.3 \quad F = (B.D) + (A.B.D) + (C.B.D) + (\bar{A}.\bar{B}.\bar{C})$$

$$2.4 \quad F = A + B + C + (\bar{A}.\bar{B}.\bar{C})$$

$$2.5 \quad F = (\bar{A}.\bar{B}.C.D) + (\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}) + (A.B.C.D) + (A.B.C.\bar{D})$$

$$2.6 \quad F = (A + B + \bar{C} + \bar{D}).\bar{A}$$

$$2.7 \quad F = \overline{((\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}).(\bar{B} + C.\bar{D}))}$$

Boolean

รศ.ฉวรงค์ บานทอง

11

กฎการเอกซ์คลูซีฟออร์ (XOR Laws)

กำหนดให้ $\bar{A}.B + A.\bar{B} = A \oplus B$

โดย $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการเอกซ์คลูซีฟออร์

สรุปการทำงานได้ดังนี้

กฎการเอกซ์คลูซีฟออร์ (XOR Laws)

A	B	A xor B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A \oplus B \oplus C = ?$$

Boolean

รศ.ฉวรงค์ บานทอง

12

นิพจน์บูลีน (Boolean Expression)

$$Y = F(A, B, C) = A.B.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

$$Y = F(A, B, C) = A.B + \bar{A}.B + \bar{B}.\bar{C}$$

$$Y = F(A, B, C) = (A + B + C).(\bar{A} + B + C).(A + \bar{B} + \bar{C})$$

$$Y = F(A, B, C) = (A + B).(\bar{A} + B).(\bar{B} + \bar{C})$$

$$Y = F(A, B, C) = A.B.(\bar{A} + B + C).(\overline{A + \bar{B} + \bar{C}})$$

นิพจน์บูลีน (Boolean Expression)

$$Y = F(A, B, C) = A.B.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

$$Y = F(A, B, C) = A.B + \bar{A}.B + \bar{B}.\bar{C}$$

$$Y = F(A, B, C) = (A + B + C).(\bar{A} + B + C).(A + \bar{B} + \bar{C})$$

$$Y = F(A, B, C) = (A + B).(\bar{A} + B).(\bar{B} + \bar{C})$$

$$Y = F(A, B, C) = A.B.(\bar{A} + B + C).(\overline{A + \bar{B} + \bar{C}})$$

Sum Of Products (SOP)

Products of Sum (SOP)

รูปแบบมาตรฐานของนิพจน์บูลีน(Boolean Expression)

รูปแบบฟังก์ชันของบูลีนมี 2 รูปแบบคือ

1. Sum of Products (SOP)

2. Product of Sums (POS)

Sum of Products อยู่ในรูปของตัวแปร AND กัน แล้วนำผลลัพธ์มา OR กัน เช่น $ABC + AB$

Product of Sum จะเป็นการ OR กันก่อนแล้วจึงนำผลลัพธ์ไป AND กัน เช่น $(A+B+C).(A+C)$

Canonical expression

ถ้าในแต่ละเทอมของฟังก์ชันมีตัวแปรอยู่ครบทุกตัว เรียกว่า “Canonical”

$$Y = f(A,B,C) = A.B.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

Canonical SOP

$$Y = f(A,B,C) = A.B + \bar{A}.B + \bar{B}.\bar{C}$$

Canonical POS

$$Y = f(A,B,C) = (A + B + C).(\bar{A} + B + C).(A + \bar{B} + \bar{C})$$

$$Y = f(A,B,C) = (A+B).(\bar{A}+B).(\bar{B}+\bar{C})$$

$$Y = f(A,B,C) = A.B.(\bar{A}+B+C).(\overline{A+\bar{B}+\bar{C}})$$

ฟังก์ชัน SOP ใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Canonical SOP ได้ โดย AND เทอมที่มีตัวแปรไม่ครบด้วยตัวแปรที่ขาดไปเช่น

$$Y = A.C + A.\bar{B}$$

พิจารณาฟังก์ชัน ทางด้านขวาเทอมแรกขาดตัวแปร B ดังนั้นจะ AND ด้วย $(B + \bar{B})$ ส่วนเทอมที่สองขาดตัวแปร C ดังนั้นจะ AND ด้วย $(C + \bar{C})$ ฟังก์ชันจึงได้เป็น

$$Y = A.C + A.\bar{B}$$

$$Y = A.(B + \bar{B}).C + A.\bar{B}.(C + \bar{C})$$

$$Y = A.B.C + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

$$Y = A.B.C + A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

Boolean

รศ.ณรงค์ นานทอง

17

และในการทำงานเดียวกัน ฟังก์ชัน POS ใดๆ ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Canonical POS ได้ โดย OR เทอมที่มีตัวแปรไม่ครบด้วยตัวแปรที่ขาดไป คือ A หรือ B หรือ C เช่น

$$Y = (A+C).(A+\bar{B})$$

$$Y = (A+(B.\bar{B})+C).(A+\bar{B}+(C.\bar{C}))$$

$$Y = (A+B+C) . (A+\bar{B}+C) . (A+\bar{B}+C) . (A+\bar{B}+\bar{C})$$

$$Y = (A+B+C) . (A+\bar{B}+C) . (A+\bar{B}+\bar{C})$$

Boolean

รศ.ณรงค์ นานทอง

18

Minterms และ Maxterms

ฟังก์ชัน Canonical SOP จะเรียกว่า minterms สัญญลักษณ์ใช้ m_i
ฟังก์ชัน Canonical POS จะเรียกว่า maxterms สัญญลักษณ์ใช้ M_i
ตัวอย่างฟังก์ชันที่มี 2 ตัวแปรเมื่อเขียนในรูป minterm และ maxterm

A	B	Minterm	Maxterm
0	0	$m_0 = \overline{A}.\overline{B}$	$M_0 = A + B$
0	1	$m_1 = \overline{A}.B$	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	$m_2 = A.\overline{B}$	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	$m_3 = A.B$	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

Boolean

รศ.ดร.นงนุช นานทอง

19

ข้อสังเกต

- ใน minterm ค่าลอจิก 0 จะแทนด้วยตัวแปรที่มี Inverter (ค่า Complement ของตัวแปร) ส่วนลอจิก 1 จะแทนด้วยตัวแปร เช่น minterm ที่ 3 ของ $F(A,B,C) \Rightarrow 011 = \overline{A}.B.C$
- ใน maxterm ค่าลอจิก 0 จะแทนด้วยตัวแปร ส่วนลอจิก 1 จะแทนด้วยตัวแปรที่มี Inverter (ค่า Complement ของตัวแปร) เช่น maxterm ที่ 3 ของ $F(A,B,C) \Rightarrow 011 = A.\overline{B}.\overline{C}$
- เราจะใช้ minterm กับฟังก์ชันที่ให้ค่าเป็นจริง (1) ส่วน maxterm จะใช้กับฟังก์ชันที่ให้ค่าเป็นเท็จ (0)

Boolean

รศ.ดร.นงนุช นานทอง

20

ตัวอย่าง จากตารางความจริงเขียนฟังก์ชันอยู่ในรูปของ minterm (SOP) และ maxterm (POS)

A B C	f(A,B,C)
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

Boolean

$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C} = m0$
 $\overline{A}.\overline{B}.C = m1$
 $A+\overline{B}+C = M2$
 $A+\overline{B}+\overline{C} = M3$
 $\overline{A}+B+C = M4$
 $A.\overline{B}.C = m5$
 $\overline{A}+\overline{B}+C = M6$
 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M7$

ในรูป minterm

$$F(A,B,C) = m0+m1+m5$$

ในรูป Maxterm

$$F(A,B,C) = M2.M3.M4.M6.M7$$

รศ.ดร.นงนุช บารทอง

21

การเขียนฟังก์ชันในรูป minterm อีกแบบหนึ่งทำดังนี้ เช่น

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C) &= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.C \\
 &= 010 + 100 + 111 \\
 &= m2 + m4 + m7 \\
 &= \sum m(2,4,7)
 \end{aligned}$$

และฟังก์ชันนี้ถ้าจะเขียนเป็น maxterm จะได้เป็น

$$f(A,B,C) = \prod M(0,1,3,5,6)$$

Boolean

รศ.ดร.นงนุช บารทอง

22

การแปลง SOP ไปเป็น POS

1. หา minterm เช่นจากตัวอย่างได้ $f(A,B,C) = \sum m(2,4,7)$
2. จากตัวแปรจำนวน 3 ตัว แสดงว่าสามารถจะมีเทอมต่างๆได้ $2^3 = 8$ ค่าคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, และ 7 แต่เป็น minterm คือ 2,4,7 ดังนั้น ของ maxterm จะเป็น 0, 1, 3,5, 6

$$\begin{aligned}f(A,B,C) &= \sum m(2,4,7) \\&= \text{PM}(0,1,3,5,6) \\&= M_0 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 \\&= 000 \cdot 001 \cdot 011 \cdot 101 \cdot 110\end{aligned}$$

$$F(A,B,C) = \sum m(2,4,7)$$

$$= \prod M(0,1,3,5,6)$$

$$F(A,B,C) = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+B+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+C)$$

Boolean

รศ.ณรงค์ นานทอง

23

แบบฝึกหัด

3. จากตารางการทำงานต่อไปนี้ จงเขียนเป็นนิพจน์บูลีนทั้งแบบ SOP และ POS

Input			Output		
A	B	C	F1	F2	F3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Boolean

รศ.ณรงค์ นานทอง

24

แบบฝึกหัด

4. จากนิพจน์ต่อไปนี้จงเขียนให้อยู่ในรูปของ canonical SOP

$$4.1 \ F(A,B,C) = \sum m(1,5,7)$$

$$4.2 \ F(A,B,C) = AB + BC + AC$$

$$4.3 \ F(A,B,C) = (A+B)(B+C)(C+A)$$

5. จากข้อ 4 จงเขียนอยู่ในรูปของ Canonical POS

6. ตามรูปที่ A, B, C, D เป็นอินพุตและ

F เป็นเอาต์พุตของวงจร เอาต์พุตจะมีค่าเป็น “1”

ถ้า $N1 + N2 > 2$ จงเขียน minterm ของ $F(A,B,C,D)$

