



บทที่ 3 การลดทอนฟังก์ชัน

Electrical and Computer Department
Faculty of Engineering
Thammasat University

บทที่ 3 การลดทอนฟังก์ชัน

การลดทอนนิพจน์ของบูลีนจะเป็นการลดความซับซ้อนของนิพจน์ลง มีผลทำให้การสร้างเป็นวงจรง่ายขึ้น วิธีการลดทอนมีอยู่หลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียง 3 วิธีคือ

- ใช้ทฤษฎีและกฎต่างๆของพีชคณิตบูลีนโดยตรง
- ฟังก์ชันคาร์โนห์ (Karnaugh Maps)
- QUINE-McCLUSKEY METHOD หรือ QM

1. ใช้ทฤษฎีและกฎต่างๆของพีชคณิตบูลีนโดยตรง

วิธีนี้จะใช้ได้กับนิพจน์ทุกชนิด ตัวแปรที่ตัวก็ได้ แต่มีจุดอ่อนที่ค่อนข้างต้องใช้ความละเอียดรอบคอบของผู้ทำมาก เป็นวิธีการที่นำเอาทฤษฎีและกฎข้อต่างๆของบูลีนมาจัดรูปสมการเสียใหม่ให้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.1 จงลดทอนฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $F(A,B,C) = A + AB + BC$

(ข) $F(A,B,C) = AB + AC + BC$

(ค)

วิธีทำ

ก.

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A + A.B + B.C \\ &= A.(1+B) + B.C \\ &= A + B.C \end{aligned}$$

ข.

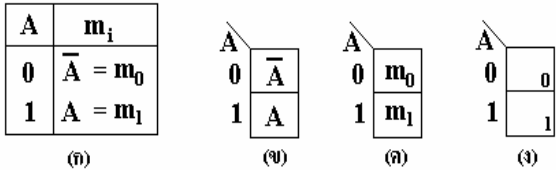
$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A.B + A.C + B.C \\ &= A.B.(C + \bar{C}) + A.C + B.C \\ &= A.B.C + A.B.\bar{C} + A.C + B.C \\ &= B.C(A + 1) + A.C(B + 1) \\ &= B.C + A.C \end{aligned}$$

ค.

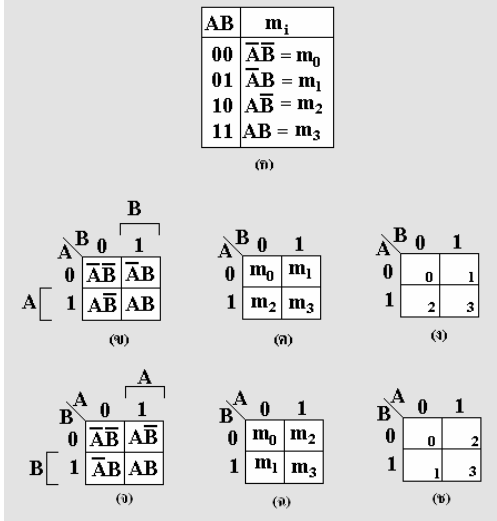
$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \overline{\overline{A.B.C}} + \overline{\overline{A+B+C}} + B.C \\ &= \overline{A+B+C} + \overline{A+B+C} + B.C \\ &= \overline{A+B+C} + B.C \\ &= A.\bar{B}.\bar{C} + (B+C) \\ &= A.\bar{B}.\bar{C} \end{aligned}$$

Karnaugh Maps

1. ตาราง Karnaugh 1 ตัวแปร

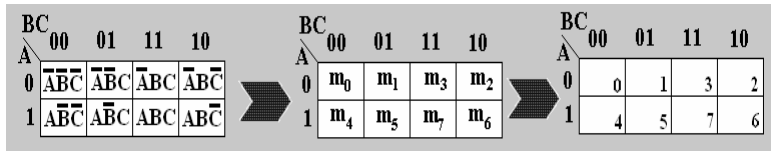


2. ตาราง Karnaugh 2 ตัวแปร

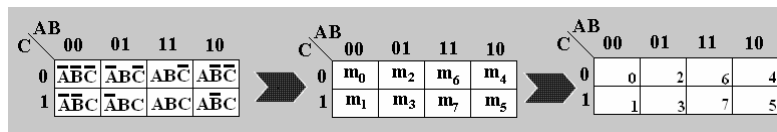


3. ตาราง Karnaugh 3 ตัวแปร

การเขียนแบบที่ 1



การเขียนแบบที่ 2



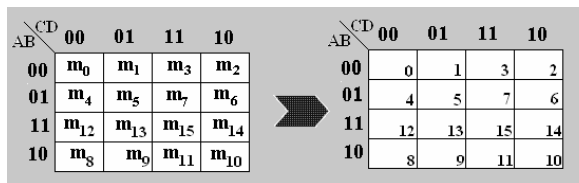
รศ.ณรงค์ งามทอง

การถอดทอมพีง์ชั่น

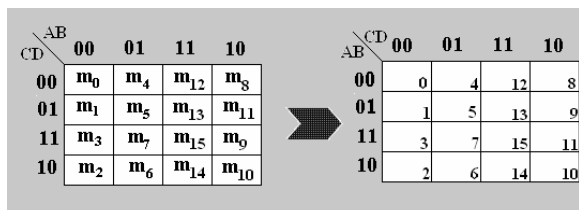
7

4. ตาราง Karnaugh 4 ตัวแปร

การเขียนแบบที่ 1



การเขียนแบบที่ 2

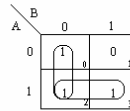
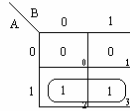


รศ.ณรงค์ งามทอง

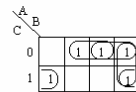
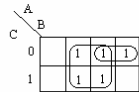
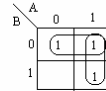
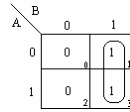
8

ลักษณะการรวมเทอมบนผังคาร์โนห์

A	B	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1



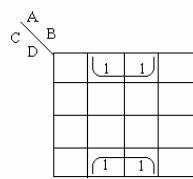
A	B	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



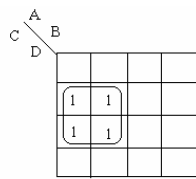
รศ.ดร.ภ. นายนทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

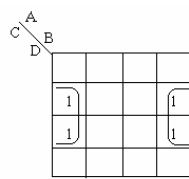
9



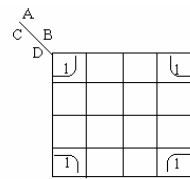
(a)



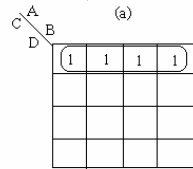
(b)



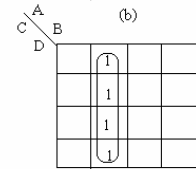
(c)



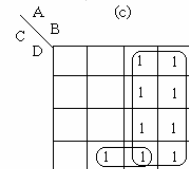
(d)



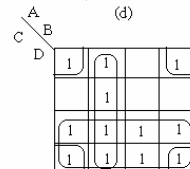
(e)



(f)



(g)



(h)

รศ.ดร.ภ. นายนทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

10

ตัวอย่าง

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

รหัสวงรี บานทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

11

ตัวอย่าง

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

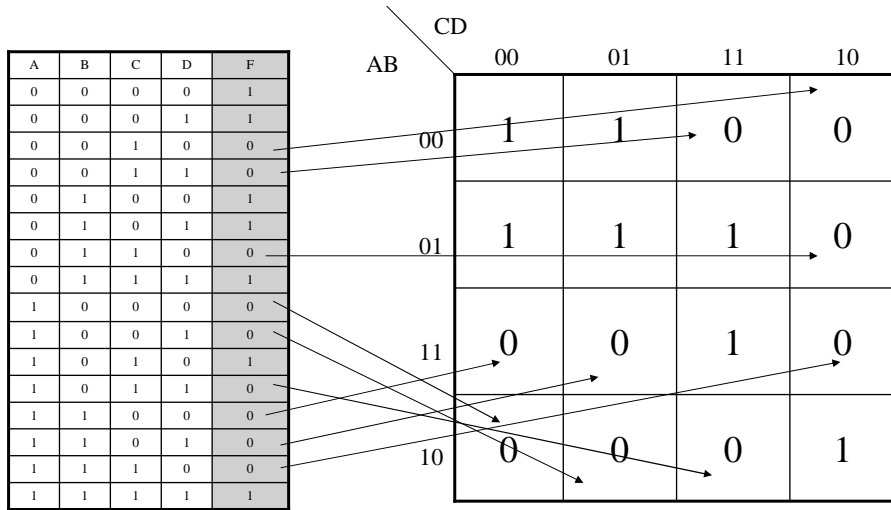
		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	1

รหัสวงรี บานทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

12

ตัวอย่าง



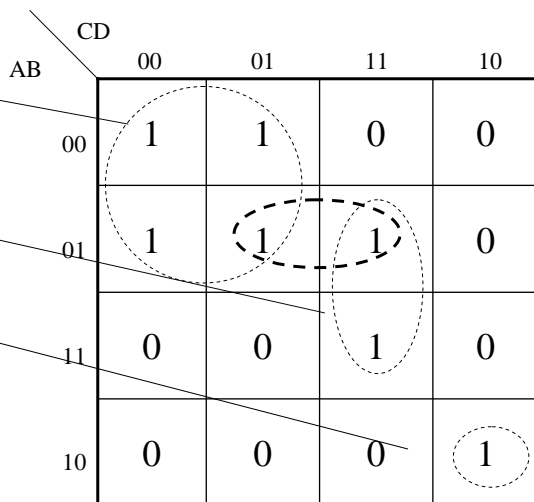
รศ.ดร.จี เวนทอง

ภาวคณนพีภังกร

13

ตัวอย่างการรวมโดยพิจารณา min term

$$\begin{aligned} & \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D \\ & + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD \\ & \equiv \bar{A}\bar{C} \\ & \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D \\ & = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \\ & \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \end{aligned}$$



รศ.ดร.จี เวนทอง

ภาวคณนพีภังกร

14

ตัวอย่างการรวมโดยพิจารณา max term

$(A+B+\bar{C}+D) \cdot (A+B+\bar{C}+\bar{D})$
 $= (A+B+\bar{C})$
 $(A+\bar{B}+\bar{C}+D) \cdot (A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})$
 $= (\bar{B}+\bar{C}+D)$
 $(\bar{A}+\bar{B}+C+D) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})$
 $= (\bar{A}+C)$
 $(\bar{A}+B+C+D) \cdot (\bar{A}+B+C+\bar{D})$
 $= (\bar{A}+B+C+D)$

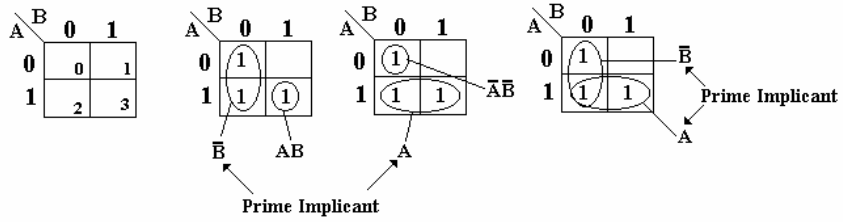
		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	1	1	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	1

Prime Implicant (PI)

- Prime Implicant (PI) หมายถึงเทอมผลคูณ (Product Term) ของตัวแปรใดๆเทอมหนึ่ง ที่เกิดขึ้นจากการลดรูปฟังก์ชันโดยที่เทอมผลคูณนั้นไม่สามารถรวมกับเทอมผลคูณอื่นๆ เพื่อให้ได้เทอมผลคูณใหม่ที่มีตัวแปรน้อยกว่าเดิม
- การที่ Minterm ตัวใดตัวหนึ่งต้องรวมกับ Minterm อีกตัวหนึ่ง โดยไม่มีโอกาสเลือกรวมกับ Minterm ตัวอื่น เราจะเรียกคู่ของ Minterm นั้นๆ ว่า เป็น Essential Prime Implicant

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B) = \sum m(0, 2, 3)$

หรือ $F(A, B) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB$



$$F(A, B) = \bar{B} + A.B$$

OR $F(A, B) = \bar{A}\bar{B} + A$

OR $F(A, B) = \bar{B} + A$

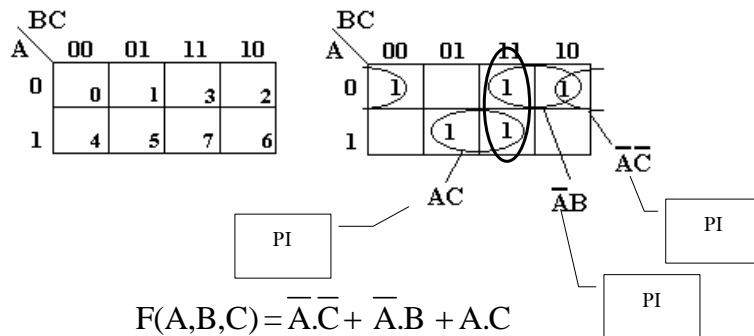
รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

17

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B, C) = \sum m(0, 2, 3, 5, 7)$

หรือ $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B.C + A\bar{B}.C + A.B.C$



$$F(A, B, C) = \bar{A}.C + \bar{A}.B + A.C$$

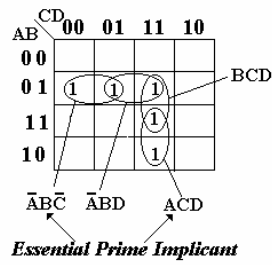
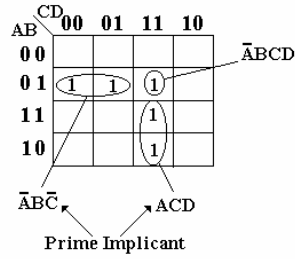
รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

18

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F(A, B, C, D) = \sum m(4, 5, 7, 11, 15)$

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10



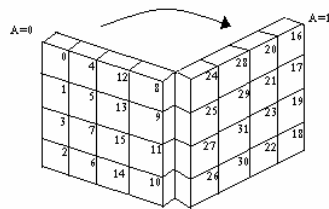
รศ.ดร.นงนุช บานทอง

19

การลดทอนสมการลอจิก สำหรับตัวแปร 5 ตัว โดยใช้ผังคาร์โนห์

	ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
DE	00	a	4	12	8	24	28	20	16
	01	1	5	13	9	25	29	21	17
	11	3	7	15	11	27	31	23	19
	10	2	6	14	10	26	30	22	18

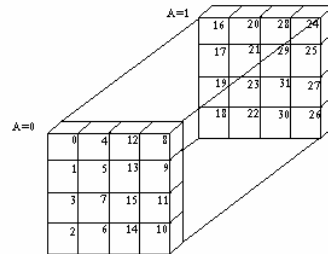
(ก)



	BC	00	01	11	10
DE	00	a	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

	BC	00	01	11	10
DE	00	b	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

(ข)



รศ.ดร.นงนุช บานทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

20

ตัวอย่าง ตัวแปร 5 ตัว

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}E + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}DE + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}E + \overline{A}\overline{B}CD\overline{E} + \overline{A}\overline{B}CDE + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}\overline{E} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}E + \overline{A}B\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}B\overline{C}DE + \overline{A}BC\overline{D}\overline{E} + \overline{A}BC\overline{D}E + \overline{A}BCD\overline{E} + \overline{A}BCDE + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}E + A\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}DE + AB\overline{C}\overline{D}\overline{E} + AB\overline{C}\overline{D}E + AB\overline{C}D\overline{E} + ABC\overline{D}\overline{E} + ABC\overline{D}E + ABCD\overline{E} + ABCDE$$

ตัวอย่าง การลดทอนสมการลอจิก สำหรับตัวแปร 6 ตัว โดยใช้ผังคาร์โนห์

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}F + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}E\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}EF + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E}F + \overline{A}\overline{B}\overline{C}DE\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}DEF + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E}F + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}E\overline{F} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}EF + \overline{A}\overline{B}CD\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}CD\overline{E}F + \overline{A}\overline{B}CDE\overline{F} + \overline{A}\overline{B}CDEF + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}F + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}E\overline{F} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}EF + A\overline{B}C\overline{D}\overline{E}\overline{F} + A\overline{B}C\overline{D}\overline{E}F + A\overline{B}C\overline{D}E\overline{F} + A\overline{B}C\overline{D}EF + AB\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + AB\overline{C}\overline{D}\overline{E}F + AB\overline{C}\overline{D}E\overline{F} + AB\overline{C}\overline{D}EF + ABC\overline{D}\overline{E}\overline{F} + ABC\overline{D}\overline{E}F + ABC\overline{D}E\overline{F} + ABC\overline{D}EF + ABCD\overline{E}\overline{F} + ABCD\overline{E}F + ABCDE\overline{F} + ABCDEF$$

Don't care terms

หมายถึง เทอมที่จะไม่ปรากฏในวงจร หรือไม่มีโอกาสเกิดขึ้นในการออกแบบเช่น ฟังก์ชันหนึ่งมี 3 ตัวแปร จะให้ค่าเป็นจริง (true) เมื่อมีอินพุต 2 อินพุตเป็นลอจิก '1' จะให้ค่าเป็นเท็จเมื่อมีอินพุต 1 อินพุตเป็นลอจิก '1' ซึ่งเมื่อนำมาเขียนเป็นตารางการทำงานจะเห็นได้ว่า เมื่อ ABC เป็น 000 และ 111 จะไม่ตรงกับเงื่อนไขใดเลย สถานะนี้เรียกว่า don't care term ใช้สัญลักษณ์เป็นตัว d ในการออกแบบค่านี้เราสามารถกำหนดให้เป็นลอจิก 0 หรือ 1 ก็ได้

ABC	F
0 0 0	d
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	d

รศ.ดร.พี. ชวนชม

ภาควิชาคอมพิวเตอร์

23

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

A \ BC	00	01	11	10
0	d		1	
1		1	d	1

AC AB

$$F(A,B,C) = AB + AC + BC$$

หรือเขียนแบบ POS

A \ BC	00	01	11	10
0	d	0		0
1	0		d	

(B+C) (A+B) (A+C)

$$F = (A+B)(A+C)(B+C)$$

รศ.ดร.พี. ชวนชม

24

ตัวอย่าง ตัวแปร 5 ตัว และมี don't care term

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}DE + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}B\bar{C}D\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}DE + \bar{A}BC\bar{D}\bar{E} + \bar{A}BCDE + \bar{A}BC\bar{D}E + \bar{A}BCDE + \bar{A}BCDE$$

QUINE-McCLUSKEY METHOD

การลดทอนฟังก์ชันด้วยวิธีผังคาร์โนห์เป็นวิธีที่ง่าย และสะดวก สำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรไม่เกิน 4 ตัว Quine และ McCluskey ได้พัฒนาวิธีตาราง (tabular method) เพื่อให้ได้ฟังก์ชันน้อยที่สุด ซึ่งสามารถใช้กับฟังก์ชันที่มีตัวแปรกี่ตัวก็ได้ รูปแบบของฟังก์ชันลอจิก จะอยู่ในรูปของ Sum-of-Product (minterm) หรือ Product-of-Sum (maxterm) ก็ได้

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาฟังก์ชันลอจิกที่น้อยที่สุดของ

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,2,5,6,7,10,13,14,15)$$

1.จัดเรียง

	A	B	C	D
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
10	1	0	1	0
7	0	1	1	1
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

2.จับคู่

$$0000 + 0010 = 00-0$$

$$0010 + 0110 = 0-10$$

$$0010 + 1010 = -010$$

$$0101 + 1101 = -101$$

$$0110 + 0111 = 011-$$

$$1010 + 1110 = 1-10$$

$$0111 + 1111 = -111$$

$$1110 + 1111 = 111-$$

การลดทอนฟังก์ชัน

A B C D A B C D

0	0	-	0	-	-	1	0
0	-	1	0	-	-	-	-
-	0	1	0	-	1	-	1
0	1	-	1	-	-	-	-
-	1	0	1	-	-	1	1
0	1	1	-	-	-	-	-
-	1	1	0	-	-	-	-
1	-	1	0	-	-	-	-
-	1	1	1	-	-	-	-
1	1	-	1	-	-	-	-
1	1	1	-	-	-	-	-

27

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาฟังก์ชันลอจิกที่น้อยที่สุดของ $F(A,B,C,D) = \sum m(0,2,5,6,7,10,13,14,15)$

1.จัดเรียง

	A	B	C	D
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
10	1	0	1	0
7	0	1	1	1
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

2.จับคู่

A B C D

0	0	-	0
0	-	1	0
-	0	1	0
0	1	-	1
-	1	0	1
0	1	1	-
-	1	1	0
1	-	1	0
-	1	1	1
1	1	-	1
1	1	1	-

A B C D

-	-	1	0
-	1	-	1
-	1	1	-

การลดทอนฟังก์ชัน

28

หาค่า Essential Prime Implicant

ABCD
0 0 - 0
0 - 1 0
- 0 1 0
0 1 - 1
- 1 0 1
0 1 1 -
- 1 1 0
1 - 1 0
1 1 - 1
1 1 1 -

ABCD
- - 1 0
- 1 - 1
- 1 1 -

ABCD	0	2	5	6	7	10	13	14	15		
- - 1 0											
- 1 - 1											
- 1 1 -											
0 0 - 0											

หาค่า Essential Prime Implicant

ABCD
0 0 - 0
0 - 1 0
- 0 1 0
0 1 - 1
- 1 0 1
0 1 1 -
- 1 1 0
1 - 1 0
1 1 - 1
1 1 1 -

ABCD
- - 1 0
- 1 - 1
- 1 1 -

ABCD	0	2	5	6	7	10	13	14	15		
- - 1 0		*		*		*		*			
- 1 - 1			*		*		*		*		
- 1 1 -				*	*			*	*		
0 0 - 0	*	*									

หาค่า Essential Prime Implicant

A B C D
0 0 - 0
0 - 1 0
- 0 1 0
0 1 - 1
- 1 0 1
0 1 1 -
- 1 1 0
1 - 1 0
1 1 - 1
1 1 1 -

A B C D
- - 1 0
- 1 - 1
- 1 1 -

A B C D	0	2	5	6	7	10	13	14	15		
- - 1 0		*		*		*		*			*
- 1 - 1			*		*		*		*		
- 1 1 -				*	*			*	*		
0 0 - 0	*	*									
		*		*		*		*			

รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

31

หาค่า Essential Prime Implicant

A B C D
0 0 - 0
0 - 1 0
- 0 1 0
0 1 - 1
- 1 0 1
0 1 1 -
- 1 1 0
1 - 1 0
1 1 - 1
1 1 1 -

A B C D
- - 1 0
- 1 - 1
- 1 1 -

A B C D	0	2	5	6	7	10	13	14	15		
- - 1 0		*		*		*		*			*
- 1 - 1			*		*		*		*		*
- 1 1 -				*	*			*	*		
0 0 - 0	*	*									
		*	*	*	*	*	*	*	*		

รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

32

หาค่า Essential Prime Implicant

A B C D
0 0 - 0
0 - 1 0
- 0 1 0
0 1 - 1
- 1 0 1
0 1 1 -
- 1 1 0
1 - 1 0
1 1 - 1
1 1 1 -

A B C D
- - 1 0
- 1 - 1
- 1 1 -

$$F(A,B,C,D) = C.\bar{D} + B.D + \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}$$

A B C D	0	2	5	6	7	10	13	14	15		
- - 1 0		*		*		*		*			*
- 1 - 1			*		*		*		*		*
- 1 1 -				*	*			*	*		
0 0 - 0	*	*									*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*		

รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

33

ตัวอย่างที่ 3.11 จงใช้ Quine-McCluskey ลดฟังก์ชัน $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,3,4,11,12,13,14,15)$

minterm	A B C D	การลดครั้งที่ 1 A B C D	การลดครั้งที่ 3 A B C D
0	0 0 0 0	0 0 0 -	0 0 - -
1	0 0 0 1	0 0 - 0	1 1 - -
2	0 0 1 0	0 - 0 0	
4	0 1 0 0	0 0 - 1	
3	0 0 1 1	0 0 1 -	
12	1 1 0 0	- 1 0 0	
11	1 0 1 1	- 0 1 1	
13	1 1 0 1	1 1 - 0	
14	1 1 1 0	1 1 - 0	
15	1 1 1 1	1 - 1 1	
		1 1 - 1	
		1 1 1 -	

รศ.ดร.ภ. นามทอง

การลดทอนฟังก์ชัน

34

เทอมที่	ABCD	0	1	2	3	4	11	12	13	14	15
1	00--	x	x	x	x						
2	11--							x	x	x	x
3	0-00	x				x					
4	-100					x		x			
5	-011				x		x				
6	1-11						x				x
		/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

เลือกเทอมใดเทอมหนึ่ง

งานในห้องเรียน



3.4 จงลดรูปโดยใช้ Quine-McCluskey ลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,4,6)$$

$$F(A,B,C,D) = \sum m(5,7,8,13,15) + \sum d(0,4,6,12)$$

$$F(A,B,C,D,E) = \sum m(0,2,8,10,16,18,24,26)$$

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,4,7,8,9,12,13,14) + \sum d(1,5,6,10,15)$$

$$F(A,B,C,D) = \prod M(1,3,5,9,11,13) \cdot \prod d(4,7,14,15)$$

$$F(A,B,C,D) = \prod M(0,4,7,8,9,12,13,14) \cdot \prod d(1,5,6,10,15)$$

3.5 จากฟังก์ชันต่อไปนี้จงลดรูปฟังก์ชัน

$$F(A,B,C,E,F) = \sum m(0,2,3,4,5,6,17,18,19,20,24) + d(1,7,16,21,22,23)$$

$$F(A,B,C,E,F) = \prod M(1,7,16,21,22,23) \cdot \prod d(0,2,3,4,5,6,17,18,19,20,24)$$

จบบทแล้ว

